Konvolusi pada Distribusi dengan Support Kompak

Cynthia Tri Octavianti, Fitria Khasanah

Pendidikan Matematika, Universitas Wisnuwardhana Malang

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017

Direvisi: 1 Juni 2017

Diterbitkan: 31 Juli 2017

Keyword:

konvolusi
support
support kompak
fungsional
distribusi

ABSTRACT (10 PT)

Matematika adalah ilmu pengetahuan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Teori distribusi merupakan cakupan dari matematika analisis fungsional. Pada Teori distribusi diberikan definisi mengenai *support*, *support* kompak dan distribusi. Dapat didefinisikan distribusi dengan *support* kompak. Berikut diberikan definisi *support*. Diberikan himpunan terbuka $X \subset \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, *support* fungsi f , ditulis $\text{supp } f$, adalah klorur dari himpunan $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$.

Selanjutnya fungsi f dikatakan mempunyai *support* kompak jika $\text{supp } f$ merupakan himpunan kompak. Notasi $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ menyatakan keluarga fungsi anggota $C^k(\mathbb{R}^n)$ yang mempunyai *support* kompak, dan notasi $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ menyatakan keluarga fungsi anggota $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ yang mempunyai *support* kompak. Fungsional Linear Kontinu $f: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ disebut distribusi. Dengan demikian fungsional linear T pada $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ disebut distribusi jika untuk setiap $\{\varphi_j\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergen ke $0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, berakibat $\{T, \varphi_j\} \rightarrow 0$. Himpunan semua distribusi pada $\mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $\mathcal{D}'$ atau $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dan ruang distribusi yang mempunyai *support* kompak pada $\mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $\mathcal{E}'$ atau $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Diberikan definisi konvolusi. Jika $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dan $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, maka $u * \varphi(x) = \langle u, \varphi(x - y) \rangle$. Definisi tersebut dapat digunakan pula jika $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Konvolusi dapat dioperasikan pada distribusi dengan *support* kompak.

Copyright © 2017 SI MaNIs.
All rights reserved.

Corresponding Author:

Third Author,
Departement of Mathematics,
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang,
Jl. Gajayana No. 50 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65144
Email: cynthiocta3@gmail.com, fitria_kha@yahoo.com

1. INTRODUCTION

The Matematika adalah ilmu pengetahuan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Teori distribusi merupakan cakupan dari matematika analisis fungsional. Dalam matematika (dan, khususnya, analisis fungsional) konvolusi adalah operasi matematika pada dua fungsi (f dan g); Itu menghasilkan fungsi ketiga, yang biasanya dipandang sebagai versi modifikasi dari salah satu fungsi asli, memberikan integral dari perkalian titik balik dari dua fungsi tersebut sebagai fungsi dari jumlah yang salah satu fungsi asli diterjemahkan. Konvolusi mirip dengan korelasi silang. Ini memiliki aplikasi yang mencakup probabilitas, statistik, visi komputer, pemrosesan bahasa alami, pemrosesan gambar dan sinyal, rekayasa, dan persamaan diferensial.[1]

Distribusi (atau fungsi umum) adalah objek yang menggeneralisasi gagasan klasik tentang fungsi dalam analisis matematis. Distribusi memungkinkan untuk membedakan fungsi yang derivatifnya tidak ada. Secara khusus, fungsi integrable lokal memiliki derivatif distribusi. Distribusi banyak digunakan dalam teori persamaan diferensial parsial, di mana mungkin lebih mudah untuk menetapkan adanya solusi distribusi. Distribusi juga penting dalam fisika dan teknik dimana banyak masalah secara alami mengarah pada persamaan diferensial yang solusinya atau kondisi awalnya adalah distribusi, seperti fungsi delta Dirac.. Menurut

otobiografinya, Laurent Schwartz(1940) memperkenalkan istilah "distribusi" dengan analogi dengan distribusi muatan listrik. Ide dasar dalam teori distribusi adalah menafsirkan ulang fungsi sebagai fungsi linier yang bekerja pada ruang fungsi test. Ada berbagai kemungkinan pilihan untuk ruang fungsi test, yang mengarah ke ruang distribusi yang berbeda. Ruang dasar fungsi test terdiri dari fungsi smooth dengan support kompak, yang mengarah ke distribusi standar. Dari sini akan diberikan konvolusi pada distribusi dengan support kompak.

2. RESEARCH METHOD

Penelitian ini bertujuan untuk memberikan ilmu pengetahuan di bidang matematika analisis yaitu Analisis Fungsional yang berkaitan dengan konvolusi pada distribusi dengan support kompak.

Adapun langkah-langkah penelitian ini adalah :

1. Memberikan definisi dan sifat distribusi dan distribusi dengan support kompak
2. Memberikan definisi dan sifat Konvolusi distribusi dengan support kompak

3. RESULTS AND ANALYSIS

3.1 Distribusi dan Distribusi dengan support Kompak

Himpunan $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan terpisah (*disconnected*) jika terdapat himpunan terbuka tak kosong $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, dengan $A \cap D$ dan $B \cap D$ saling asing dan gabungannya menjadi D . Selanjutnya A dan B disebut *disconnection* D sedangkan himpunan yang tidak terpisah disebut himpunan terhubung (*connected*).

Himpunan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, himpunan Ω disebut domain jika himpunan Ω terbuka dan *connected*.

Keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I, I \text{ himpunan indeks}\}$ disebut liput terbuka (*open cover*) himpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$, jika

$$K \subseteq \bigcup_{G_i \in \mathcal{G}} G_i$$

Diketahui $\mathcal{G}$ liput terbuka $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

- i. Liput terbuka $\mathcal{G}$ disebut liput terbuka berhingga, jika banyak anggota $\mathcal{G}$ berhingga.
- ii. Keluarga himpunan $\mathcal{H}$ disebut liput bagian (sub cover) $\mathcal{G}$, jika $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ dan $\mathcal{H}$ merupakan liput K .

Definisi 3.1.1 (Himpunan Kompak)

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan kompak jika untuk setiap liput terbuka K mempunyai liput bagian yang banyak anggotanya berhingga (*finite sub cover*).

Dengan demikian himpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompak jika dan hanya jika untuk setiap liput terbuka $\mathcal{G}$ untuk K , terdapat $G_1, G_2, \dots, G_p \in \mathcal{G}$ sehingga

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^p G_i.$$

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan terbatas jika terdapat sel I dengan $K \subseteq I$. Sedangkan himpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompak jika dan hanya jika K terbatas dan tertutup. [3]

Diberikan Ω himpunan tak kosong, koleksi semua himpunan bagian dari Ω disebut himpunan kuasa (*power set*) dan biasa dituliskan dengan $\mathcal{P}(\Omega)$ atau 2^Ω .

Diberikan X himpunan tak kosong. Koleksi $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ disebut aljabar- σ pada X , jika memenuhi sifat-sifat :

- i. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- ii. Jika $A \in \mathcal{A}$ maka $A^c \in \mathcal{A}$,
- iii. Jika $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ maka $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Himpunan $I \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ dengan $[a_i, b_i]$ sel untuk setiap i . Volume dari I dituliskan $|I|$, dengan

$$\begin{aligned} |I| &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) \\ &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i). \end{aligned}$$

Himpunan $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Ukuran luar dari E , dituliskan $\mu^*(E)$, dengan

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^\infty |I_k| : I_k \text{ sel}, E \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k\}.$$

Himpunan $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\mu^*(E)$ ukuran luar dari E , maka $\mu^*(E) \geq 0$.

Jika μ^* ukuran luar, maka $\mu^*(\emptyset) = 0$. Selanjutnya jika $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, dengan $A \subseteq B$, maka $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Jika $\{A_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ untuk setiap $1 \leq i < \infty$, maka

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i).$$

Definisi 3.1.2 (Himpunan Terukur)

Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dikatakan terukur jika

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Karena $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, diperoleh

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Dengan demikian untuk membuktikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur, cukup dengan membuktikan $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Jika A terukur maka A^c terukur dan himpunan $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Jika A dan B terukur maka $A \cup B, A \cap B$ terukur.

Akibatnya Jika $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur, maka $\cup_{i=1}^k E_i$ dan $\cap_{i=1}^k E_i$ terukur.

Jika $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur dan saling-asing maka untuk setiap $A \subseteq \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^k E_i)) = \sum_{i=1}^k \mu^*(A \cap E_i).$$

Jika $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur dan saling-asing maka untuk setiap $A \subseteq \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\mu^*(A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} E_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i).$$

Jika $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur dan saling-asing maka

$$\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Jika $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur maka $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ terukur.

Koleksi semua himpunan terukur pada $\mathbb{R}^n$ dinotasikan $\mathbf{m}$. Jika μ^* ukuran luar pada himpunan tak kosong $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbf{m}$ merupakan aljabar- σ .

Definisi 3.1.3 (Ukuran)

Diketahui $\mathcal{A}$ merupakan aljabar- σ . Fungsi $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, disebut ukuran, jika μ memenuhi sifat-sifat :

- i. $\mu(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{A}$,
- ii. $\mu(\emptyset) = 0$
- iii. $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ untuk setiap barisan $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ dengan $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Jika μ^* ukuran luar pada $\mathbb{R}^n$ maka fungsi $\mu: \mathbf{m} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dengan $\mu(E) = \mu^*(E)$ untuk setiap $E \in \mathbf{m}$, merupakan ukuran.

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$ himpunan terukur, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fungsi, dan sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

- i. $\{x \in E | f(x) > \alpha\}$ terukur
- ii. $\{x \in E | f(x) \geq \alpha\}$ terukur
- iii. $\{x \in E | f(x) < \alpha\}$ terukur
- iv. $\{x \in E | f(x) \leq \alpha\}$ terukur.

Ruang ukuran $(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^n$ himpunan terukur. Fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dikatakan terukur pada E jika salah satu pernyataan di atas terpenuhi.

Diberikan $(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$ ruang ukuran dan $E \in \mathbf{m}$. Suatu sifat P dikatakan berlaku hampir di mana-mana pada E , jika terdapat himpunan terukur $A \subseteq E$ dengan $\mu(A) = 0$ sehingga sifat P berlaku untuk setiap $x \in E - A$.

Diberikan himpunan $A \subset \mathbb{R}^n$, fungsi karakteristik $\chi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & \text{jika } t \in A \\ 0, & \text{jika } t \notin A \end{cases}$$

fungsi χ_A terukur jika dan hanya jika A terukur.

Definisi 3.1.4 (Fungsi Sederhana)

Fungsi $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi sederhana jika terdapat $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ dan himpunan terukur $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ sehingga

$$s = \sum_{i=1}^k b_i \chi_{E_i}$$

dengan χ_{E_i} fungsi Karakteristik dari E_i .

Selanjutnya untuk $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$ dan $b_i = b_j, \forall i \neq j$ maka $\sum_{i=1}^k b_i \chi_{E_i}$ sebagai representasi kanonik.

Diberikan ruang ukuran $(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$, fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^n$ terukur. Jika f terukur pada E dan $f = g$ hampir di mana-mana pada E maka g terukur pada E .

Definisi 3.15 (Integral Lebesgue)

Diberikan ruang ukuran $(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$ ruang ukuran Lebesgue, $E \subset \mathbb{R}^n$, dan fungsi sederhana $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ berbentuk kanonik, yaitu $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$. Bilangan

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^n c_i \mu(\chi_{E_i})$$

disebut integral Lebesgue fungsi sederhana φ pada E .

Definisi 3.1.6 (Ruang $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$)

Diberikan ruang ukuran $(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$, untuk $1 \leq p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$ adalah himpunan semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu < \infty$.

Koleksi $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$ merupakan ruang bernorma terhadap norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Untuk $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbf{m}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. [3], [5]

Fungsi $\bar{\phi}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\bar{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$ dikatakan mempunyai derivatif parsial terhadap peubah ke- m di $c \in A$, jika $\frac{\partial \phi_1(c)}{\partial x_m}$ dan $\frac{\partial \phi_2(c)}{\partial x_m}$ ada. Lebih lanjut

$$\frac{\partial \bar{\phi}(c)}{\partial x_m} = \frac{\partial \phi_1(c)}{\partial x_m} + i \frac{\partial \phi_2(c)}{\partial x_m}$$

Lebih lanjut untuk $k_1, k_2, \dots, k_n$ bilangan bulat non negatif, pasangan $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ disebut multi indeks berdimensi n . Kemudian didefinisikan

$$|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

dan

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

Sehingga fungsi $\bar{\phi}$ dikatakan mempunyai derivative parsial hingga k kali jika

$$\frac{\partial^{|k|} \bar{\phi}(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} \phi_1(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + i \frac{\partial^{|k|} \phi_2(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

Koleksi semua fungsi $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga $D^\alpha \phi \in C(\mathbb{R}^n)$ untuk setiap multi indeks α yang kurang atau sama dengan k dinotasikan dengan $C^k(\mathbb{R}^n)$. Selanjutnya koleksi semua fungsi $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga $D^\alpha \phi \in C(\mathbb{R}^n)$ untuk setiap multi indeks α dinotasikan dengan $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definisi 3.1.7 (Support)

Diberikan himpunan terbuka $X \subset \mathbb{R}^n$ dan fungsi $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Support fungsi f , ditulis $supp f$, adalah klosur dari himpunan $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$. Selanjutnya fungsi f dikatakan mempunyai support kompak jika $supp f$ merupakan himpunan kompak.

Notasi $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ menyatakan keluarga fungsi anggota $C^k(\mathbb{R}^n)$ yang mempunyai support kompak, dan notasi $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ menyatakan keluarga fungsi anggota $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ yang mempunyai support kompak.

Definisi 3.1.8. (Fungsi Tes)

Diberikan fungsi $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi ϕ disebut fungsi tes (*test function*) pada $\mathbb{R}^n$ jika

1. Fungsi ϕ mempunyai derivatif parsial sampai tak hingga kali yang kontinu pada $\mathbb{R}^n$,
2. terdapat domain terbatas $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sehingga $\phi(x) = 0$ untuk setiap $x \notin \Omega$.

Diperhatikan bahwa setiap $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ merupakan fungsi tes karena terdapat domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yang supportnya kompak. Sebaliknya setiap fungsi tes belum tentu anggota $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Jika $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan f sebarang fungsi yang mempunyai derivatif parsial sampai tak hingga kali maka perkalian $(f\phi)(x) = f(x)\phi(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definisi 3.1.9 (Distribusi)

Fungsional linear kontinu $f: C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ disebut distribusi.

Dengan demikian fungsional linear T pada $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ disebut distribusi jika untuk setiap $\{\varphi_j\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergen ke $0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, berakibat $\{T, \varphi_j\} \rightarrow 0$.

Himpunan semua distribusi pada $\mathbb{R}^n$ dinotasikan dengan $\mathcal{D}'$ atau $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dan ruang distribusi yang mempunyai support kompak pada $\mathbb{R}^n$ dinotasikan $\mathcal{E}'$ atau $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. [4]

Teorema 3.1.10 Fungsional Linear T pada $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ distribusi jika dan hanya jika $\forall K \subset \Omega$ kompak $\exists C > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \phi(x)|, \text{ untuk } \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

3.2 Konvolusi Distribusi dengan support Kompak

Konvolusi dua fungsi f dan φ didefinisikan sebagai $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x - y)dy$

Jika $f \in L^1_{loc}$ dan $\varphi \in C_0^\infty$ maka $f * \varphi = \varphi * f$, $f * \varphi \in C^\infty$ dan $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$.

Definisi 3.2.1. Jika $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dan $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ maka $u * \varphi(x) = \langle u_y, \varphi(x - y) \rangle$.

Notasi $\langle u_y, \varphi(x - y) \rangle$ berarti bahwa distribusi u bekerja pada fungsi tes $y \mapsto \varphi(x - y)$.

Teorema 3.2.2

Jika $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dan $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, maka $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Bukti :

Akan ditunjukkan $u * \varphi$ kontinu. Andaikan $x \rightarrow x_0$. Jika $|x - x_0| \leq 1$ maka $y \mapsto \varphi(x - y)$ mempunyai support pada himpunan kompak. Lebih lanjut $\partial_y^\alpha(\varphi(x - y) - \varphi(x_0 - y)) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$ konvergen seragam. Jadi $\varphi(x - y) \rightarrow \varphi(x_0 - y)$ pada $\mathcal{D}$ ketika $x \rightarrow x_0$ diperoleh $u * \varphi(x) = \langle u_y, \varphi(x - y) \rangle \rightarrow \langle u_y, \varphi(x_0 - y) \rangle = u * \varphi(x_0), x \rightarrow x_0$.

Akibat 3.2.3 ini juga berlaku pada $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.4

Jika $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ dan $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ maka $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$

Contoh 3.2.5

Akan dipetakan $\psi \mapsto a * \psi$, dimana $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Untuk $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, diperoleh

$$\int (a * \psi) \varphi = \iint a(x - z)\psi(z)\varphi(x)dz dx = \int \psi(\bar{a} * \varphi)$$

di mana $\bar{a}(x) = a(-x)$. Sehingga diperoleh

$$\langle a * u, \varphi \rangle = \langle u, \bar{a} * \varphi \rangle, u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Akibat 3.2.6

Jika $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ cukup jika salah satu dari φ, ψ mempunyai support kompak maka $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$

Bukti

$$\begin{aligned} u * (\varphi * \psi)(x) &= \langle u_y, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y - t)\psi(t)dt \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u_y, \varphi(x - y - t) \rangle \psi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u * \varphi(x - t)\psi(t)dt = (u * \varphi) * \psi \end{aligned}$$

4. CONCLUSION

Konvolusi juga berlaku pada distribusi dengan support kompak dengan salah satu dari φ, ψ mempunyai support kompak. Yaitu Jika $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ cukup jika salah satu dari φ, ψ mempunyai support kompak maka $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$.

REFERENCES

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>. diakses 31 Maret 2017.
- [2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics)). diakses 31 Maret 2017.
- [3] Royden HL. Real Analysis. New York: Collier Mac Millan International Editions. 1968
- [4] Stakgold I. Green's Functions and Boundary Value Problems. New York: John Wiley and Sons. 1979
- [5] Wheeden RL. Measure and Integral. New York: Marcell Dekker, Inc. 1977